Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

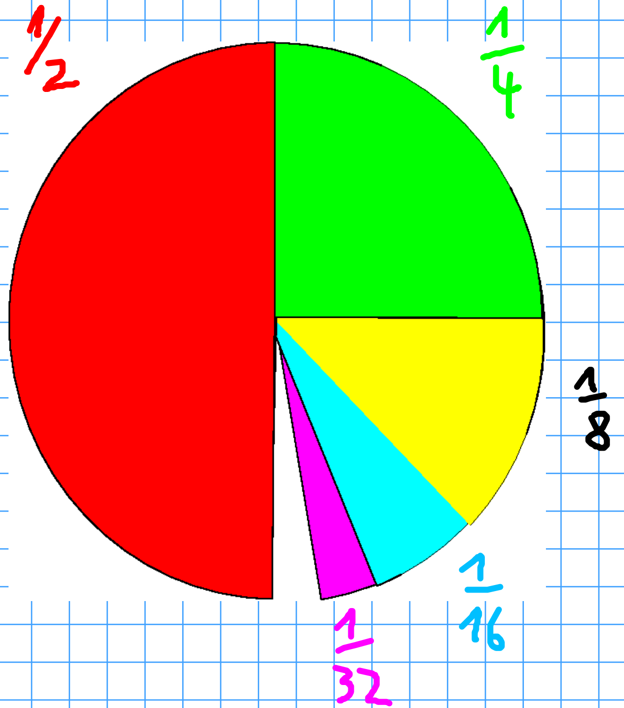
Wie viel Zeit brauche ich um unendlich viele Zahlen zu addieren ?

Workshop zum Studieninfotag

16. März 2022 , 16:45

Problem 1: Ein Jogger läuft $\frac{1}{2}\,\mathrm{km}$ in einer Minute. Das ist sehr anstrengend (war auch sehr schnell !), deshalb schafft er in der zweiten Minute nur noch $\frac{1}{4}\,\mathrm{km}$ und in der dritten Minute wird er noch langsamer, da reicht es nur noch für $\frac{1}{8}\,\mathrm{km}$. So geht das immer weiter, in jeder Minute schafft er nur noch die Hälfte der Strecke, die er in der Minute zuvor gelaufen ist.

- Wie weit kommt er auf diese Weise höchstens ? 1 km
- Wann kommt er dort an ? nie



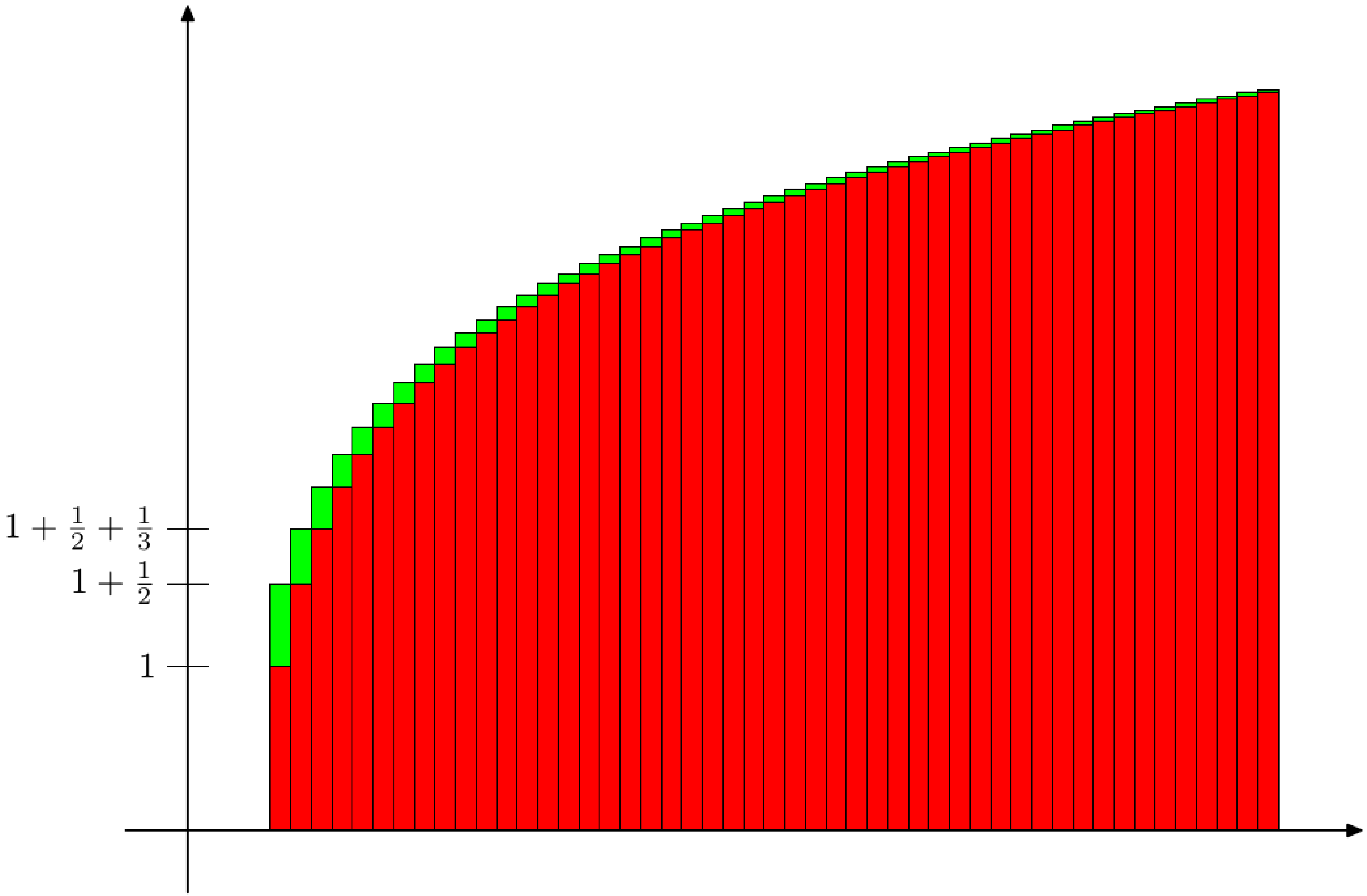
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$

Das ist eine geometrische Reihe

Problem 2: Eine Radfahrerin ist deutlich schneller unterwegs als der Jogger. Sie schafft $1\,\mathrm{km}$ in einer Minute. Dann wird auch sie etwas langsamer, in der zweiten Minute schafft sie nur $\frac{1}{2}\,\mathrm{km}$, in der dritten Minute dann $\frac{1}{3}\,\mathrm{km}$, in der vierten Minute noch $\frac{1}{4}\,\mathrm{km}$ usw.

- Kann sie auf diese Weise vom Forschungszentrum in Garching bis zum Münchner Marienplatz kommen ? (Das sind etwa $20\,\mathrm{km}$) ja
- Wie lange braucht sie ? mehre Milliarden Jahre

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\underset{>\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\underset{>\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}}+\underset{>\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}+\underset{>\frac{1}{8}}{\frac{1}{7}}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\underset{>\frac{1}{16}}{\frac{1}{9}}+\underset{>\frac{1}{16}}{\frac{1}{10}}+\dots}_{>\frac{1}{2}}$$

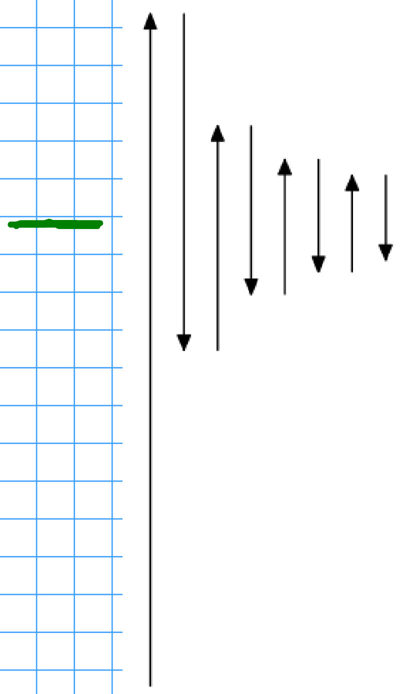


→ wird „sehr schnell" flach, erreicht aber jede beliebige Höhe irgendwann.

Dies ist die so genannte harmonische Reihe

Problem 3: Die Radfahrerin will gar nicht so weit weg aus Garching und entschließt sich, bei ihrer zweiten Tour nach jeder Minute umzudrehen. Sie fährt $1\,\mathrm{km}$ in der ersten Minute. Dann fährt sie zurück; allerdings schafft sie in der zweiten Minute wieder nur $\frac{1}{2}\,\mathrm{km}$. Danach dreht sie erneut um und fährt in der dritten Minute $\frac{1}{3}\,\mathrm{km}$, dreht dann abermals um und fährt $\frac{1}{4}\,\mathrm{km}$ usw.

- Gibt es einen Punkt auf der Strecke, an dem sie innerhalb jeder Minute wieder vorbeikommt? ja



$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\dots = \ln(2)$$

Problem 4: Wir wissen, dass es bei einer Summe nicht auf die Reihenfolge der Summaden ankommt, so ist etwa $a + b - c = a - c + b = -c + b + a$.

Kann man bei einer Summe mit unendlich vielen Summanden deren Reihenfolge einfach ändern? nein!

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{=\frac{5}{6}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{8} + \frac{1}{9}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{10} + \frac{1}{11}}_{<0} - \ldots < \frac{5}{6}$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{=\frac{5}{6}} \underbrace{+ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}_{>0} \underbrace{+ \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}}_{>0} + \ldots > \frac{5}{6}$$

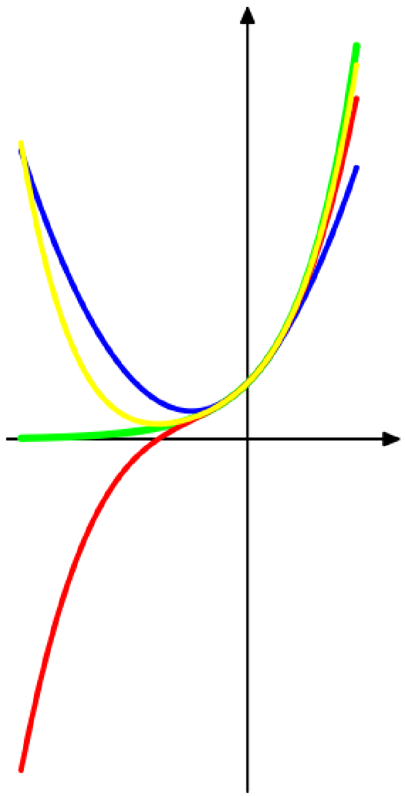
Problem 5: Wir suchen eine Funktion, die gleich ihrer Ableitung ist.

$f(x)$	$f'(x)$
$1+x$	1
$1+x+\frac{1}{2}x^2$	$1+x$
$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3$	$1+x+\frac{1}{2}x^2$
$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}x^4$	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3$

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\dots$$

$$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\dots$$

$$n! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$$



Die hier genannten Funktionen sind in der Abbildung skizziert. Welche Funktion gehört zu welcher Farbe ?

e^x

$1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$